AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASININ XƏBƏRLƏRİ
Fizika-texnika və riyaziyyat elmləri seriyası, 2003, №3

TRANSACTIONS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF AZERBAIJAN
Series of physical-technical and mathematical sciences, 2003, №3

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
Серия физико-технических и математических наук, 2003, №3

УДК 511.2

Н.М.САБЗИЕВ

СВОЙСТВО МНОЖЕСТВ, ПОРОЖДАЮЩИЕ СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА ВИДА $6m \pm 1$

1. **Введение.** В настоящее время один из широко распространенных алгоритмов криптографической шифровки, обеспечивающий безопасность интернет сети является RSA (Риман-Шамир-Адлеман) алгоритм. Этот алгоритм основывается на выборе достаточно больших простых чисел. С этой точки зрения, вопрос генерации простых чисел требует изучения характера поведения простых чисел в натуральном ряду. Для описания поведения функции распределения простых чисел требуется исследование некоторых вспомогательных классов натуральных чисел. Данная работа посвящена исследованию некоторых подклассов натуральных чисел, порождающих составные числа, что позволяет описать функцию распределения простых чисел.

Пусть $\pi(x)$ количество простых чисел находящихся в отрезке $[1, x]$. Гипотеза Гаусса и Лежандра об асимптотическом законе распределения простых чисел утверждает, что $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$, при $x \to \infty$. В 1848 году Чебышев [1, С.341] доказал, что если предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi(x)}{x/\ln x}$ существует, то он равен единице. Существование этого предела было доказано, в 1896 году независимо друг от друга Адамаром и Валле-Пуссеном [2, С.70]. Но попытки явно описать функцию $\pi(x)$ до сих пор не увенчались успехом.

Данная статья посвящена изучению подклассов натуральных чисел, которые в дальнейшем позволяют описать функцию $\pi(x)$ в явном виде. В работе строятся некоторые множества натуральных чисел m, порождающие составные числа вида $6m+1$, $6m-1$ и исследуются некоторые их свойства. Отметим, что развернутое изложение результатов депонировано в [3, 4].

2. Необходимое и достаточное условие простоты натурального числа. Пусть n некоторое натуральное число, N множество всех натуральных чисел. Обозначим, через $N(n)$ множество натуральных чисел не превосходящих n, а через $N(>n)$ или $N(\geq n+1)$ множество натуральных чисел, дополняющее множество $N(n)$ до N, т.е.

$$N = N(n) \bigcup N(>n), \qquad N(n) \bigcap N(>n) = \varnothing.$$

Множество $N(\geq 5)$ можно представить в виде

$$N(\geq 5) = \{6m-1, 6m, 6m+1, 6m+2, 6m+3, 6m+4\}_{m=1}^{\infty}. \qquad (1)$$

Представляя в виде $6m = 2\cdot 3\cdot m$, $6m+2 = 2\cdot(3m+1)$, $6m+4 = 2\cdot(3m+2)$, $6m+2 = 2\cdot(3m+1)$, легко видеть, что эти числа кроме самого себя и единицы имеют

другие делители, поэтому при всех $m \in N$ являются составными числами. Следовательно, справедлива

Теорема 1. *(Необходимое условие) Простое число не меньше 5-и имеют вид* $6m-1$ *или* $6m+1\,(m \in N)$.

Заметим, что при некоторых значениях, $m \in N$ по крайней мере, один из чисел вида $6m-1$ или $6m+1$ является составным. Например, при $m=8$ число $6m+1=49=7\cdot 7$, при $m=20$ число $6m-1=119=7\cdot 17$, при $m=34$ числа $6m+1=205=5\cdot 41$, $6m-1=203=7\cdot 29$ составные. Опишем подмножества $m \in N$, для которых $6m-1$ или $6m+1$ являются составными числами.

Теорема 2. *Если число* $n=6m+1\,(m \in N)$ *составное, то существует хотя бы одна пара* $k,t \in N$, *такая, что либо*

$$6m+1=(6k+1)(6t+1), \quad (t \le k),$$

либо

$$6m+1=(6k-1)(6t-1), \quad (t \le k).$$

Доказательство. В силу представления (1)

$$N(\ge 5)=\{6m+\alpha, \quad \alpha=-1,0,1,2,3,4\}_{m=1}^{\infty}.$$

Если число $n=6m+1$ составное, то оно, по крайней мере, имеет два сомножителя $6k+\alpha_1$ и $6t+\alpha_2$, где $k,t \in N$, $\alpha_j \in \{-1,0,1,2,3,4\}$, $(j=1,2)$. Отсюда

$$n=6m+1=(6k+\alpha_1)(6t+\alpha_2)=6(6kt+\alpha_1 t+\alpha_2 k)+\alpha_1\alpha_2.$$

Непосредственной проверкой легко убедится, что $\alpha_1\alpha_2=1$, возможно, только в случае при $\alpha_1,\alpha_2=\pm 1$, т.е. $6m+1=(6k+1)(6t+1)$ или $6m+1=(6k-1)(6t-1)$.

В силу симметрии относительно k и t, не уменьшая общности, достаточно рассмотреть случай $t \le k$. Тогда имеем либо

$$m=6kt+k+t, \quad (t \le k), \tag{2}$$

либо

$$m=6kt-k-t, \quad (t \le k). \tag{3}$$

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Если число* $n=6m-1\,(m \in N)$ *составное, то существует хотя бы одна пара* $k,t \in N$, *такая что* $6m-1=(6k+1)(6t-1)$.

Отсюда имеем $m=6kt-k+t$. Целесообразно в дальнейшем рассматривать два варианта:

$$m=6kt-k+t, \quad (t \le k), \tag{4}$$

$$m=6kt+k-t, \quad (t \le k). \tag{5}$$

В силу теорем 2 и 3 имеем

Следствие 1. *Если число* $n=6m+1\,(m \in N)$ *составное, то найдутся некоторые зависящие от* m *числа* $v_1 \ge 0$, $v_2 \ge 0$, $v_1+v_2 \ge 2$, *и числа* $k_j, t_i \in N$, $j=1,\ldots,v_1$, $i=1,\ldots,2v_2$ *такие, что число* n *можно представить в виде*

$$n=\prod_{j=1}^{v_1}(6k_j+1)\prod_{i=1}^{2v_2}(6t_i-1).$$

Здесь и в дальнейшем везде, когда верхний индекс произведения меньше чем нижний, его значение будем принимать как единицу, например $\prod_{j=1}^{0}(6k_j+\alpha)=1$.

Доказательство. В силу теорем 2, 3, если число n вида $n=6m+1\,(m \in N)$ составное, то оно представимо в виде $n=(6k_1+1)(6k_2+1)$, $k_1,k_2 \in N$ или $n=(6t_1-1)(6t_2-1)$, $t_1,t_2 \in N$. Каждое из сомножителей $6k_1+1$, $6k_2+1$, $6t_1-1$,

$6t_2-1$ в свою очередь, также может быть представлено в виде произведений своих сомножителей. Продолжая этот процесс, легко обнаружить, что число сомножителей вида $6t_i-1$, $i\in N$ всегда четное. Таким образом, в итоге число n представляется в виде $n=\prod_{j=1}^{v_1}(6k_j+1)\prod_{i=1}^{2v_2}(6t_i-1)$, где $v_1, 2v_2$ - число соответствующих сомножителей. Следствие доказано.

Аналогично доказывается

Следствие 2. *Если число* $n=6m-1\,(m\in N)$ *составное, то найдутся некоторые зависящие от* m *числа* $v_1\geq 0$, $v_2\geq 1$, $v_1+v_2\geq 2$, *и числа* $k_j, t_i\in N$, $j=1,...,v_1$, $i=1,...,(2v_2-1)$, *что число* n *представится в виде*

$$n=\prod_{j=1}^{v_1}(6k_j+1)\prod_{i=1}^{2v_2-1}(6t_i-1).$$

Таким образом, если число вида $6m+1$ составное, то $m=6kt\pm(k+t)$, $(t\leq k)$ и если число вида $6m-1$ составное, то $m=6kt\pm(k-t)$, $(t\leq k)$.

Обозначим, через M_1 множество натуральных чисел вида (2) и (3), и через M_2 множество натуральных чисел вида (4) и (5), т.е.

$$M_1=\{6kt\pm(k+t)\}_{k,t=1}^{\infty},\qquad M_2=\{6kt\pm(k-t)\}_{k,t=1}^{\infty}$$

Пусть $H_1=N\setminus M_1$ и $H_2=N\setminus M_2$. Следует заметить, что $H_1\cap M_1=\varnothing$ и $H_2\cap M_2=\varnothing$.

Теорема 4. *Для того чтобы натуральное число вида* $6m+1\,(m\in N)$ *было составным, необходимо и достаточно, чтобы* $m\in M_1$.

Действительно, если натуральное число вида $6m+1$ составное, то в силу теоремы 2 можем писать $6m+1=(6k\pm1)(6t\pm1)$, $(t\leq k)$. Отсюда, $m=6kt\pm(k+t)$, т.е. $m\in M_1$. А если $m\in M_1$, то $m=6kt\pm(k+t)$, и отсюда $6m+1=36kt\pm6(k+t)+1=(6k\pm1)(6t\pm1)$, т.е. $6m+1$ составное число.

Аналогично доказывается

Теорема 5. *Для того чтобы натуральное число вида* $6m-1\,(m\in N)$ *было составным, необходимо и достаточно, чтобы* $m\in M_2$.

В силу теорем 4 и 5 имеют место следующие утверждения:

Теорема 6. *Для того чтобы натуральное число вида* $6m+1\,(m\in N)$ *было простым, необходимо и достаточно, чтобы* $m\in H_1$.

Теорема 7. *Для того чтобы натуральное число вида* $6m-1\,(m\in N)$ *было простым, необходимо и достаточно, чтобы* $m\in H_2$.

Пусть $M_1(m_0)$ подмножество элементов множества M_1 не превосходящих m_0, а $M_2(m_0)$ подмножество элементов множества M_2 не превосходящих m_0. Исследуем структуру этих подмножеств.

3. Свойства множества $M_1(m_0)$. По определению, если $n\in M_1(m_0)$, то, по крайней мере, найдется одна пара натуральных чисел $k,t\in N$ таких, что $n=6kt-(k+t)$ или $n=6kt+(k+t)$.

Обозначим через A и B подмножества элементов $n\in M_1(m_0)$ соответственно, вида $6kt-(k+t)$ и $6kt+(k+t)$, т.е.

$$A=\{6kt-(k+t)\leq m_0,\quad k,t\in N\},\quad B=\{6kt+(k+t)\leq m_0,\quad k,t\in N\}.$$

Очевидно, A и B являются двухпараметрическими семействами. Выделим из них однопараметрические семейства для фиксированных значений t. Пусть при $t=1,2,...,v_0$ $A_t=\{6kt-(k+t)\le m_0,\quad k\in N\}$, т.е.

$$A_1=\{5\cdot k-1\le m_0,\quad k\in N\},$$
$$A_2=\{11\cdot k-2\le m_0,\quad k\in N\},$$
$$\ldots,$$
$$A_{v_0}=\{(6v_0-1)\cdot k-v_0\le m_0,\quad k\in N\}.$$

И пусть при $t=1,2,...,k_0$, $B_t=\{6kt+(k+t)\le m_0,\quad k\in N\}$, т.е.

$$B_1=\{7\cdot k+1\le m_0,\quad k\in N\},$$
$$B_2=\{13\cdot k+2\le m_0,\quad k\in N\},$$
$$\ldots,$$
$$B_{k_0}=\{(6k_0+1)\cdot k+k_0\le m_0,\quad k\in N\}.$$

Ясно, что $A=\bigcup_{t=1}^{v_0}A_t$ и $B=\bigcup_{t=1}^{k_0}B_t$. Назовем множества $A_1,A_2,...,A_{v_0}$ и $B_1,B_2,...,B_{k_0}$ подклассами множества $M_1(m_0)$, а числа $5,11,17,,23,31,...,6v_0-1$ и $7,13,19,25,...,6k_0+1$, соответственно, коэффициентами указанных подклассов.

Для заданного числа $m_0\in N$, определим количество v_0 и k_0 подклассов A_t и B_t. Сначала рассмотрим семейство A_t. Заметим, что в дальнейшем квадратные скобки в тексте будут означать целую часть выражения.

Число v_0 является таковым числом среди чисел v, что соответствует максимальному натуральному t, удовлетворяющим систему неравенств

$$\left.\begin{aligned}&6vt-v-t\le m_0,\\&1\le t\le v.\end{aligned}\right\}$$

Произведем замену переменных. Пусть $y=6t-1$, $x=6v-1$. Тогда система неравенств может быть переписана в виде

$$\left.\begin{aligned}&x\cdot y\le 6m_0+1,\\&5\le y\le x.\end{aligned}\right\}$$

Эта система с геометрической точки зрения описывает на плоскости некоторую двумерную область Q, заключенную между гиперболой $xy=6m_0+1$, и линиями $y=x$ и $y=5$. Ясно, что максимальное значение y при $(x,y)\in Q$, достигается на пересечении граничных линий $xy=6m_0+1$ и $y=x$, и совместно решая эти уравнения, находим $x=\sqrt{6m_0+1}$. Отсюда получаем $v_0=\left[\dfrac{1+\sqrt{6m_0+1}}{6}\right]$. Аналогичным приемом можем установить, что $k_0=\left[\dfrac{-1+\sqrt{6m_0+1}}{6}\right]$.

Поскольку $M_1(m_0)=A\bigcup B$, то $M_1(m_0)=\left(\bigcup_{t=1}^{v_0}A_t\right)\bigcup\left(\bigcup_{t=1}^{k_0}B_t\right)$.

Лемма 1. *Для всякого подкласса A_v с составным коэффициентом $6v-1$, существуют r и k такие, что A_v одновременно является подмножеством подклассов A_r и B_k, т.е. $A_v\subset B_k$ и $A_v\subset A_r$.*

Доказательство. Пусть $n \in A_\nu$ и $6\nu-1$ составное число. Тогда существует $t \in N$ такое, что $n=(6\nu-1)t-\nu$, а в силу (4) и (5) существует хотя бы одна пара чисел $k,r \in N$, что $\nu = 6kr-k+r$. Поэтому

$n=(6\nu-1)t-\nu=(6(6kr-k+r)-1)t-(6kr-k+r)=(6k+1)(6r-1)t-(6k+1)r+k=$

$=(6k+1)((6r-1)t-r)+k=(6k+1)s+k \in B_k$,

где $s=(6r-1)t-r$. Следовательно, $A_\nu \subset B_k$. С другой стороны

$n=(6k+1)(6r-1)t-(6r-1)k-r=(6r-1)((6k+1)t-k)-r=(6r-1)s-r \in A_r$,

где $s=(6k+1)t-k$. Следовательно, $A_\nu \subset A_r$.

Таким образом, доказано, что при выполнении условий леммы, одновременно имеют место вложения $A_\nu \subset B_k$, $A_\nu \subset A_r$, т.е. $A_\nu \subset A_r \cap B_k$.

Лемма 2. *Для всякого подкласса B_ν с составным коэффициентом $6\nu+1$, существуют $k,r \in N$ такие, что B_ν является подмножеством подкласса A_r или B_k, т.е. $B_\nu \subset A_r$ или $B_\nu \subset B_k$.*

Действительно, если $n \in B_\nu$ и число $6\nu+1$ составное, то существует $t \in N$ такое, что $n=(6\nu+1)t+\nu$. А в силу (2) и (3) существует хотя бы одна пара чисел $k,r \in N$, что, либо $\nu = 6kr+(k+r)$, либо $\nu = 6kr-(k+r)$. Пусть $\nu = 6kr+(k+r)$. Тогда

$n=(6\nu+1)t+\nu=(6\cdot(6kr+(k+r))+1)t+6kr+(k+r)=$

$=(6k+1)(6r+1)t+(6k+1)r+k=(6k+1)s+k \in B_k$,

где $s=(6r+1)t+r$. Следовательно, $B_\nu \subset B_k$.

Теперь пусть $\nu = 6kr-(k+r)$, тогда

$n=(6\nu+1)t+\nu=(6\cdot(6kr-(k+r))+1)t+6kr-(k+r)=$

$=(6k-1)(6r-1)t+(6r-1)k-r=(6r-1)s-r \in A_r$,

где $s=(6k-1)t+k$. Следовательно, $B_\nu \subset A_r$.

Таким образом, доказано, что при выполнении условий леммы, имеет место хотя бы один из вложений $B_\nu \subset B_k$, $B_\nu \subset A_r$, т.е. $B_\nu \subset A_r \cup B_k$.

Лемма 3. *Пусть для некоторых $\nu,k \in N$, $\nu \neq k$, число $n \in M_1(m_0)$ является общим элементом подклассов B_ν и B_k с простыми коэффициентами $6\nu+1$ и $6k+1$, т.е. $n \in B_\nu \bigcap B_k$. Тогда*

$$n=(6\nu+1)(6k+1)s-\frac{5(6\nu+1)(6k+1)+1}{6}=\aleph s-\frac{5\aleph+1}{6},$$

а количество элементов множества $B_\nu \bigcap B_k$ равно $s=\left[\dfrac{6m_0+5\aleph+1}{6\aleph}\right]$, где $\aleph=(6\nu+1)(6k+1)$.

Доказательство. Предположим $n \in B_\nu \bigcap B_k$. Тогда, по определению подклассов B_ν и B_k, существуют некоторые натуральные числа p и q такие, что одновременно справедливы следующие представления:

$$n=(6\nu+1)p+\nu, \qquad n=(6k+1)q+k.$$

Отсюда $6n+1=(6\nu+1)(6p+1)=(6k+1)(6q+1)$. Поскольку, по условию леммы $6\nu+1$ и $6k+1$ простые числа, то в силу утверждения теоремы 2 для некоторых $\tau,r \in N$ имеет место $6p+1=(6k+1)(6\tau+1)$ и $6q+1=(6\nu+1)(6r+1)$.

Обозначим $\aleph=(6k+1)(6\nu+1)$, $s=\tau+1$. Тогда

$6n+1=(6\nu+1)(6p+1)=(6\nu+1)(6k+1)(6\tau+1)=6\tau(6\nu+1)(6k+1)+(6\nu+1)(6k+1)$.

отсюда $n=(6\nu+1)(6k+1)\tau+\dfrac{(6k+1)(6\nu+1)-1}{6}=\aleph\tau+\dfrac{\aleph-1}{6}=\aleph s-\dfrac{5\aleph+1}{6}$.

Очевидно, количество s элементов множества $B_\nu\bigcap B_k$ определяется из неравенства $\aleph s-\dfrac{5\aleph+1}{6}\le m_0$, следовательно, $s=\left[\dfrac{6m_0+5\aleph+1}{6\aleph}\right]$.

Аналогично доказываются следующие леммы.

Лемма 4. *Пусть для некоторых* $\nu,k\in N$ *число* $n\in M_1(m_0)$ *является общим элементом подклассов* A_ν *и* B_k *с простыми коэффициентами* $6\nu-1$ *и* $6k+1$, *т.е.* $n\in A_\nu\bigcap B_k$. *Тогда* $n=\aleph s-\dfrac{\aleph+1}{6}$, *а количество элементов множества* $A_\nu\bigcap B_k$ *равно* $s=\left[\dfrac{6m_0+\aleph+1}{6\aleph}\right]$, *где* $\aleph=(6\nu-1)(6k+1)$.

Лемма 5. *Пусть для некоторых* $\nu,k\in N$, $\nu\ne k$, *число* $n\in M_1(m_0)$ *является общим элементом подклассов* A_ν *и* A_k *с простыми коэффициентами* $6\nu-1$ *и* $6k-1$, *т.е.* $n\in A_\nu\bigcap A_k$. *Тогда* $n=\aleph s-\dfrac{5\aleph+1}{6}$, *а количество элементов множества* $A_\nu\bigcap A_k$ *равно* $s=\left[\dfrac{6m_0+5\aleph+1}{6\aleph}\right]$, *где* $\aleph=(6\nu-1)(6k-1)$.

На основании лемм 3, 4 и 5, методом математической индукции получаем справедливость следующего утверждения:

Лемма 6. *Пусть* $m_0\in N$ *некоторое число,* $\nu_0=\left[\dfrac{1+\sqrt{6m_0+1}}{6}\right]$, $k_0=\left[\dfrac{-1+\sqrt{6m_0+1}}{6}\right]$, *и числа* s_1,s_2 *удовлетворяют следующим условиям:*

$$0\le s_1\le\nu_0,\quad 0\le s_2\le k_0,\quad 2\le s_1+s_2.$$

Пусть число $n\in M_1(m_0)$ *является общим элементом некоторых подклассов* A_{ν_j}, $\nu_j\in H_1(\nu_0)$, $(j=1,\dots,s_1)$ *и* B_{k_i}, $k_i\in H_1(k_0)$, $(i=1,\dots,s_2)$ *с соответствующими простыми коэффициентами* $6\nu_j-1$ *и* $6k_i+1$, *т.е.* $n\in\left(\bigcap_{j=1}^{s_1}A_{\nu_j}\right)\bigcap\left(\bigcap_{i=1}^{s_2}B_{k_i}\right)$.

а) Если s_1 *четное число или нуль, то справедливо представление*

$$n=\prod_{j=1}^{s_1}(6\nu_j-1)\prod_{i=1}^{s_2}(6k_i+1)s-\frac{5\prod_{j=1}^{s_1}(6\nu_j-1)\prod_{i=1}^{s_2}(6k_i+1)+1}{6}=\aleph s-\frac{5\aleph+1}{6},$$

где $\aleph=\prod_{j=1}^{s_1}(6\nu_j-1)\prod_{i=1}^{s_2}(6k_i+1)$, *и количество элементов множества* $\left(\bigcap_{j=1}^{s_1}A_{\nu_j}\right)\bigcap\left(\bigcap_{i=1}^{s_2}B_{k_i}\right)$ *равно* $s=\left[\dfrac{6m_0+5\aleph+1}{6\aleph}\right]$;

б) Если s_1 нечетное число, то справедливо представление

$$n=\prod_{j=1}^{s_1}(6\nu_j-1)\prod_{i=1}^{s_2}(6k_i+1)s-\frac{\prod_{j=1}^{s_1}(6\nu_j-1)\prod_{i=1}^{s_2}(6k_i+1)+1}{6}=\aleph s-\frac{\aleph+1}{6},$$

где $\aleph=\prod_{j=1}^{s_1}(6\nu_j-1)\prod_{i=1}^{s_2}(6k_i+1)$, *и количество элементов множества* $\left(\bigcap_{j=1}^{s_1}A_{\nu_j}\right)\bigcap\left(\bigcap_{i=1}^{s_2}B_{k_i}\right)$ *равно* $s=\left[\frac{6m_0+\aleph+1}{6\aleph}\right]$.

Таким образом, лемма 6 является обобщением лемм 3-5 и их утверждения получаются как частные случаи леммы 6.

Теперь отметим, что на основании доказанных лемм, в представлении $M_1(m_0)=\left(\bigcup_{j=1}^{\nu_0}A_j\right)\bigcup\left(\bigcup_{t=1}^{k_0}B_t\right)$, сумма может распространяться только по тем индексам j и i для которых A_j и B_t являются подклассами с простыми коэффициентами, т.е. $M_1(m_0)=\left(\bigcup_{j\in H_1(\nu_0)}A_j\right)\bigcup\left(\bigcup_{i\in H_1(k_0)}B_t\right)$.

4. Свойства множества $M_2(m_0)$. По определению, если $n\in M_2(m_0)$, то, по крайней мере, найдется одна пара натуральных чисел $k,t\in N$, $(t\le k)$, что $n=6kt-(k-t)$ или $n=6kt+(k-t)$.

Обозначим через C и D подмножества элементов $n\in M_2(m_0)$, соответственно, вида $6kt-(k-t)$ и $6kt+(k-t)$, т.е.

$$C=\{6kt-(k-t)\le m_0,\quad t\le k,\quad k,t\in N\},$$
$$D=\{6kt+(k-t)\le m_0,\quad t\le k,\quad k,t\in N\}.$$

Очевидно, C и D являются двухпараметрическими семействами. Выделим из них однопараметрические семейства для фиксированных значений t. Пусть при $t=1,2,...r_0$, $C_t=\{6kt-k+t\le m_0,\quad k\in N,\quad t\le k\}$, т.е.

$$C_1=\{5k+1\le m_0,\quad k\in N\},$$
$$C_2=\{11k+2\le m_0,\quad k\in N\},$$
$$\ldots,$$
$$C_{r_0}=\{(6r-1)k+r_0\le m_0,\quad k\in N\},$$

и пусть при $t=1,2,...s_0$, $D_t=\{6kt+k-t\le m_0,\quad k\in N,\quad t\le k\}$, т.е.

$$D_1=\{7k-1\le m_0,\quad k\in N\},$$
$$D_2=\{13k-2\le m_0,\quad k\in N\},$$
$$\ldots,$$
$$D_{s_0}=\{(6s_0+1)k-s_0\le m_0,\quad k\in N\}.$$

Ясно, что $C=\bigcup_{t=1}^{r_0}C_t$ и $D=\bigcup_{t=1}^{s_0}D_t$. Назовем множества $C_1,C_2,...C_{r_0}$ и $D_1,D_2,...,D_{s_0}$ подклассами множества $M_2(m_0)$, а числа $5,11,..,6r_0-1$ и $7,13,..,6s_0+1$, соответственно, коэффициентами указанных подклассов.

Для заданного числа $m_0 \in N$, определим количество r_0 и s_0 подклассов C_t и D_t. Сначала рассмотрим семейство C_t.

Число r_0 является таковым числом среди чисел k, что соответствует максимальному натуральному t, удовлетворяющим систему неравенств

$$\left.\begin{array}{l} 6kt-(k-t)\le m_0, \\ 1\le t\le k. \end{array}\right\}$$

Произведем замену переменных. Пусть $y=6t-1$, $x=6k+1$. Тогда система неравенств может быть переписано в виде

$$\left.\begin{array}{l} x\cdot y\le 6m_0-1, \\ 5\le y\le x-2. \end{array}\right\}$$

С геометрической точки зрения эта система описывает на плоскости некоторую двумерную область Q, заключенную между гиперболой $xy=6m_0-1$, и линиями $y=x-2$ и $y=5$. Ясно, что максимальное значение y при $(x,y)\in Q$, достигается на пересечении граничных линий $xy=6m_0-1$ и $y=x-2$, и совместно решая эти уравнения, находим $x=1+\sqrt{6m_0}$. Отсюда получаем $r_0=\left[\sqrt{\frac{m_0}{6}}\right]$. Аналогичным приемом можем установить, что $s_0=\left[\sqrt{\frac{m_0}{6}}\right]$. Таким образом, $r_0=s_0$.

Поскольку $M_2(m_0)=C\bigcup D$, ясно, что $M_2(m_0)=\left(\bigcup_{t=1}^{r_0}C_t\right)\bigcup\left(\bigcup_{t=1}^{r_0}D_t\right)$.

Лемма 7. *Для всякого подкласса C_v с составным коэффициентом $6v-1$ существуют r и k такие, что C_v является подмножеством подклассов C_r и D_k, т.е. $C_v\subset C_r$ и $C_v\subset D_k$.*

Таким образом, при выполнении условий леммы 7, одновременно имеют место вложения $C_v\subset C_r$, $C_v\subset D_k$, т.е. $C_v\subset C_r\bigcap D_k$.

Лемма 8. *Для всякого подкласса D_s с составным коэффициентом $6s+1$ существуют r и k такие, что D_s является подмножеством подклассов C_r или D_k, т.е. $D_s\subset C_r$ или $D_s\subset D_k$.*

Таким образом, при выполнении условий леммы 8, имеет место, по крайней мере, одно из вложений $D_s\subset C_r$, $D_s\subset D_k$, т.е. $D_s\subset C_r\bigcup D_k$.

Совершенно аналогично могут быть доказаны аналоги лемм 3-5 для подклассов C_r и D_k. Далее, так же, как и лемма 6, методом математической индукции доказывается

Лемма 9. *Пусть $m_0\in N$ некоторое число, $r_0=\left[\sqrt{\frac{m_0}{6}}\right]$, и числа s_1,s_2 удовлетворяют следующие условия:*

$$0\le s_1\le r_0,\quad 0\le s_2\le r_0,\quad 2\le s_1+s_2\le 2r_0.$$

Пусть число $n \in M_2(m_0)$ *является общим элементом некоторых подклассов* C_{ν_j}, D_{k_i}, $j=1,...,s_1$, $i=1,...,s_2$, $\nu_j, k_i \in H_2(r_0)$, *с соответствующими простыми коэффициентами* $6\nu_j - 1$ *и* $6k_i + 1$, *т.е.* $n \in \left(\bigcap_{j=0}^{s_1} C_{\nu_j}\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=0}^{s_2} D_{k_i}\right)$.

а) Если s_1 *четное число или нуль, то справедливо представление*

$$n = \prod_{j=1}^{s_1}(6\nu_j - 1)\prod_{i=1}^{s_2}(6k_i + 1)s - \frac{\prod_{j=1}^{s_1}(6\nu_j - 1)\prod_{i=1}^{s_2}(6k_i + 1) - 1}{6} = \aleph s - \frac{\aleph - 1}{6},$$

где $\aleph = \prod_{j=1}^{s_1}(6\nu_j - 1)\prod_{i=1}^{s_2}(6k_i + 1)$, *и количество элементов множества* $\left(\bigcap_{j=1}^{s_1} C_{\nu_j}\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{s_2} D_{k_i}\right)$ *равно* $s = \left[\frac{6m_0 + \aleph - 1}{6\aleph}\right]$;

б) Если s_1 *нечетное число, то справедливо представление*

$$n = \prod_{j=1}^{s_1}(6\nu_j - 1)\prod_{i=1}^{s_2}(6k_i + 1)s - \frac{5 \cdot \prod_{j=1}^{s_1}(6\nu_j - 1)\prod_{i=1}^{s_2}(6k_i + 1) - 1}{6} = \aleph s - \frac{5\aleph - 1}{6}$$

где $\aleph = \prod_{j=1}^{s_1}(6\nu_j - 1)\prod_{i=1}^{s_2}(6k_i + 1)$, *и количество элементов множества* $\left(\bigcap_{j=1}^{s_1} C_{\nu_j}\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{s_2} D_{k_i}\right)$ *равно* $s = \left[\frac{6m_0 + 5\aleph - 1}{6\aleph}\right]$.

Теперь отметим, что на основании доказанных лемм, в представлении $M_2(m_0) = \left(\bigcup_{j=1}^{r_0} C_j\right) \bigcup \left(\bigcup_{t=1}^{r_0} D_t\right)$, сумма может распространяться только по тем индексам j и i для которых C_j и D_t являются подклассами с простыми коэффициентами, т.е. $M_2(m_0) = \left(\bigcup_{j \in H_2(r_0)} C_j\right) \bigcup \left(\bigcup_{i \in H_2(r_0)} D_t\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухштаб А.А. Теория чисел. М., Наука, 1966.
2. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. М., Наука, 1971.
3. Сабзиев Н.М. Распределение простых чисел в натуральном ряду. ВИНИТИ, Деп. №9, 1980.
4. Сабзиев Н.М. О росте функции $\pi(x)$. АзНИИНТИ, Деп.№1280-Аз., 1985.

Компания Kiber Ltd

Представлено 250603