AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASININ XƏBƏRLƏRİ
Fizika-texnika və riyaziyyat elmləri seriyası, 2003, №3

TRANSACTIONS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF AZERBAIJAN
Series of physical-technical and mathematical sciences, 2003, №3

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
Серия физико-технических и математических наук, 2003, №3

УДК: 511.2

Н. М. САБЗИЕВ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В НАТУРАЛЬНОМ ЧИСЛОВОМ РЯДУ

Введение. Как известно, одним из широко распространенных алгоритмов криптографической шифровки, обеспечивающий безопстность интернет сети является RSA алгоритм, который основывается на выборе достаточно больших простых чисел, вопрос генерации которых требуют изучения поведений простых чисел в натуральном ряду. Данная работа посвящена описанию функции распределения простых чисел в натуральном ряду.

Число простых чисел, меньших или равных x, обозначается через $\pi(x)$. Еще в конце восемнадцатого столетия Лежандром и Гауссом была предложена гипотеза о том, что среди первых n натуральных чисел количество простых чисел около $n/\ln n$, т.е. $\pi(x) \approx x/\ln x$. Давнейшие исследования посвящались изучению асимптотического поведения функции $\pi(x)$ при $x \to \infty$, но попытки явно описать функцию $\pi(x)$ до сих пор не увенчались успехом.

Настоящая статья посвящена явному описанию функции $\pi(x)$ и основывается на результаты работы [2].

Отметим, что излагаемые в этой работе результаты депонированы в [3, 4].

Обозначения и вспомогательные факты. Пусть N множество натуральных чисел, $m_0 \in N$ некоторое фиксированное число. Через $N(m_0)$, обозначим множество всех натуральных чисел, не превосходящих число m_0. Если T некоторое числовое множество, то через $mes(T)$ обозначим количество его элементов. $[a]$ будет означать целую часть числа a.

Через $H_1(m_0)$ и $H_2(m_0)$ обозначим множество натуральных чисел m, порождающих простые числа вида $6m+1$, $m \le m_0$ и $6m-1$, $m \le m_0$, соответственно и пусть $M_1(m_0) = N(m_0) \setminus H_1(m_0)$, $M_2(m_0) = N(m_0) \setminus H_2(m_0)$. Через $\mathrm{P}(m_0)$ и $\mathrm{Q}(m_0)$ обозначим, соответственно, количества элементов $M_1(m_0)$ и $M_2(m_0)$. Наконец, обозначим через $\pi^{(+)}(x)$ и $\pi^{(-)}(x)$ количество простых чисел вида $6m+1$ и $6m-1$, соответственно, не превосходящих заданное число x. В этих обозначениях, очевидно, что

$$\pi^{(+)}(6m_0+1) = m_0 - \mathrm{P}(m_0), \qquad \pi^{(-)}(6m_0+1) = m_0 - \mathrm{Q}(m_0).$$

Очевидно, для количества элементов некоторых конечных множеств F_1, F_2 имеет место равенство

$$mes(F_1 \cup F_2) = mes(F_1) + mes(F_2) - mes(F_1 \cap F_2). \qquad (1)$$

Ниже мы воспользуемся обобщением этого факта.

Лемма. *Пусть $F_1, F_2, ..., F_n$ некоторые конечные множества. Тогда*

$$mes\left(\bigcup_{j=1}^{n}F_j\right)=\sum_{j=1}^{n}mes(F_j)-\sum_{1\le l<j\le n}mes(F_i\cap F_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}mes(F_i\cap F_j\cap F_k)+\cdots+(-1)^{n-1}mes\left(\bigcap_{j=1}^{n}F_j\right).$$

Лемма доказывается методом математической индукции.

Количество простых чисел вида $6m+1$. В работе [2] было доказано, что множество $M_1(m_0)$ может быть представлено в виде $M_1(m_0)=\left(\bigcup_{j\in H_1(\nu_0)}A_j(m_0)\right)\bigcup\left(\bigcup_{i\in H_1(k_0)}B_i(m_0)\right)$, где

$$A_j(m_0)=\{n\mid n=6kj-(k+j)\le m_0, k\in N\},\quad j\in H_1(\nu_0),\quad \nu_0=\left[\frac{1+\sqrt{6m_0+1}}{6}\right],$$

$$B_i(m_0)=\{n\mid n=6ki+(k+i)\le m_0, k\in N\},\qquad i\in H_1(k_0),\qquad k_0=\left[\frac{-1+\sqrt{6m_0+1}}{6}\right].$$

Множества $A_j=A_j(m_0)$ и $B_i=B_i(m_0)$ называются подклассами $M_1(m_0)$ с коэффициентами $6j-1$ и $6i+1$, соответственно.

Обозначим через $\mathrm{P}_{1,0}(m_0;j;0)$ и $\mathrm{P}_{0,1}(m_0;0;i)$ соответственно количество элементов подклассов A_j, $j\in H_1(\nu_0)$ и B_i, $i\in H_1(k_0)$. Нетрудно установить, что

$$\mathrm{P}_{1,0}(m_0;j;0)=\left[\frac{m_0+j}{6j-1}\right]\qquad \text{и}\qquad \mathrm{P}_{0,1}(m_0;0;i)=\left[\frac{m_0-i}{6i+1}\right].$$

Пусть $j_1,j_2,...j_l\in H_1(\nu_0)$ и $i_1,i_2,...,i_r\in H_1(k_0)$ некоторые числовые индексы такие, что, $j_k\ne j_m$ и $i_k\ne i_m$ при $k\ne m$. Обозначим через $\mathrm{P}_{l,r}(m_0;j_1,j_2,...,j_l;i_1,i_2,...,i_r)$ количество общих элементов подклассов A_j, B_i, $j=j_1,j_2,...,j_l$, $i=i_1,i_2,...,i_r$. Обозначим через ν_1 наибольший элемент множества $H_1(\nu_0)$, через k_1 наибольший элемент множества $H_1(k_0)$ и $n_1\equiv\nu_1+k_1$.

Пусть $\aleph_{(j_1,j_2,...,j_l;i_1,i_2,...,i_r)}=(6j_1-1)(6j_2-1)\cdots(6j_l-1)(6i_1+1)(6i_2+1)\cdots(6i_r+1)$. Обозначим

$$\alpha_{(j_1,j_2,...,j_l;i_1,i_2,...,i_r)}=\begin{cases}\dfrac{5\cdot\aleph_{(j_1,j_2,...,j_l;i_1,i_2,...,i_r)}+1}{6}, & \text{если } l \text{ четное число,}\\[2ex] \dfrac{\aleph_{(j_1,j_2,...,j_l;i_1,i_2,...,i_r)}+1}{6}, & \text{если } l \text{ нечетное число}\end{cases}$$

В силу леммы 6 работы [3],

$$\mathrm{P}_{l,r}(m_0;j_1,j_2,...,j_l;i_1,i_2,...,i_r)=\left[\frac{m_0+\alpha_{(j_1,j_2,...,j_l;i_1,i_2,...,i_r)}}{\aleph_{(j_1,j_2,...,j_l;i_1,i_2,...,i_r)}}\right],\quad l+r\ge 2.$$

Для заданного $k\in N$ обозначим сумму $\sum_{l+r=k}\mathrm{P}_{l,r}(m_0;j_1,j_2,...,j_l;i_1,i_2,...,i_r)$ через $\mathrm{P}_k(m_0)$. Заметим, что количество слагаемых $\mathrm{P}_{l,r}(m_0;j_1,j_2,...,j_l;i_1,i_2,...,i_r)$ в сумме $\mathrm{P}_k(m_0)$ есть $C_{n_1}^k$. Для наглядности приведем явный вид функций $\mathrm{P}_k(m_0)$, $k=1,2,...,n_1$:

$$\mathrm{P}_1(m_0)=\left[\frac{m_0+1}{5}\right]+\left[\frac{m_0+2}{11}\right]+...+\left[\frac{m_0+\nu_1}{6\nu_1-1}\right]+\left[\frac{m_0-1}{7}\right]+\left[\frac{m_0-2}{13}\right]+...+\left[\frac{m_0-k_1}{6k_1+1}\right]$$

,

$$\mathrm{P}_2(m_0)=\left[\frac{m_0+6}{5\cdot 7}\right]+\left[\frac{m_0+46}{5\cdot 11}\right]+\ldots+\left[\frac{m_0+(6\nu_1k_1-k_1+\nu_1)}{(6\nu_1-1)(6k_1+1)}\right],$$

$$\mathrm{P}_3(m_0)=\left[\frac{m_0+321}{5\cdot 7\cdot 11}\right]+\left[\frac{m_0+76}{5\cdot 7\cdot 13}\right]+\ldots+\left[\frac{m_0+\alpha_{(\nu_1-1,\nu_1;k_1)}}{(6(\nu_1-1)-1)(6\nu_1-1)(6k_1+1)}\right]+$$

$$+\left[\frac{m_0+\alpha_{(\nu_1;k_1-1,k_1)}}{(6\nu_1-1)(6(k_1-1)+1)(6k_1+1)}\right],$$

…,

$$\mathrm{P}_{n_1}(m_0)=\left[\frac{m_0+\alpha_{(1,2,\ldots,\nu_1;1,2,\ldots,k_1)}}{5\cdot 7\cdot 11\cdots(6\nu_1-1)\cdot(6k_1+1)}\right].$$

Учитывая утверждение леммы 1, переформулируем формулу определения количества элементов множества $M_1(m_0)$ в виде

$$mes\left(\left(\bigcup_{j\in H_1(\nu_0)}A_j(m_0)\right)\cup\left(\bigcup_{i\in H_1(k_0)}B_i(m_0)\right)\right)=$$

$$=\sum_{l+r=1}^{n_1}(-1)^{l+r-1}\sum_{(j_1<j_2<\ldots<j_l)}\sum_{(i_1<i_2<\ldots<i_r)}mes\left(\left(\bigcap_{j_s\in H_1(\nu_0)}A_{j_s}\right)\cap\left(\bigcap_{i\in H_1(k_0)}B_{i_s}\right)\right),$$

и принимая во внимание принятые выше обозначения, получим

$$\mathrm{P}(m_0)=\mathrm{P}_1(m_0)-\mathrm{P}_2(m_0)+\mathrm{P}_3(m_0)+\ldots+(-1)^{n_1-1}\,\mathrm{P}_{n_1}(m_0).$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Для заданного* $m_0\in N$ *количество элементов множества* $M_1(m_0)$ *определяется по формуле*

$$\mathrm{P}(m_0)=\sum_{k=1}^{n_1}(-1)^{k-1}\,\mathrm{P}_k(m_0)=$$

$$=\sum_{l+r=1}^{n_1}(-1)^{l+r-1}\sum_{\substack{(j_1<j_2<\ldots<j_l),\\ j_1,j_2,\ldots,j_l\in H_1(\nu_0)}}\sum_{\substack{(i_1<i_2<\ldots<i_r),\\ i_1,i_2,\ldots,i_r\in H_1(k_0)}}\left[\frac{m_0+\alpha_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}}{(6j_1-1)(6j_2-1)\cdots(6j_l-1)(6i_1+1)(6i_2+1)\cdots(6i_r+$$

,

где $\nu_0=\left[\dfrac{1+\sqrt{6m_0+1}}{6}\right]$, $k_0=\left[\dfrac{-1+\sqrt{6m_0+1}}{6}\right]$,

$$\alpha_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}=\begin{cases}\dfrac{5\cdot\aleph_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}+1}{6}, & \text{если } l \text{ четное число,}\\[2ex] \dfrac{\aleph_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}+1}{6}, & \text{если } l \text{ нечетное число}\end{cases}$$

Теперь учитывая, что $H_1(m_0)=N(m_0)\setminus M_1(m_0)$, для определения количества простых чисел вида $6m+1$ можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2. *Для заданного* $m_0\in N$ *количество элементов множества* $H_1(m_0)$ *определяется по формуле*

$$\pi^{(+)}(6m_0+1)=m_0-\mathrm{P}(m_0)= \tag{2}$$

$$= m_0 - \sum_{l+r=1}^{n_1} (-1)^{l+r-1} \sum_{\substack{(j_1<j_2<\ldots<j_l),\\ j_1,j_2,\ldots,j_l \in H_1(v_0)}} \sum_{\substack{(i_1<i_2<\ldots<i_r),\\ i_1,i_2,\ldots,i_r \in H_1(k_0)}} \left[\frac{m_0 + \alpha_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}}{(6j_1-1)(6j_2-1)\cdots(6j_l-1)(6i_1+1)(6i_2+1)\cdots(6i_r+1)} \right]$$

$$\text{, где } v_0 = \left[\frac{1+\sqrt{6m_0+1}}{6} \right],\ k_0 = \left[\frac{-1+\sqrt{6m_0+1}}{6} \right],$$

$$\alpha_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)} = \begin{cases} \dfrac{5\cdot \aleph_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}+1}{6}, & \text{если } l \text{ четное число,} \\ \dfrac{\aleph_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}+1}{6}, & \text{если } l \text{ нечетное число} \end{cases}$$

Количество простых чисел вида $6m-1$. В работе [2] было доказано, что множество $M_2(m_0)$ может быть представлено в виде $M_2(m_0) = \left(\bigcup_{j\in H_2(r_0)} C_j(m_0) \right) \bigcup \left(\bigcup_{i\in H_2(r_0)} D_i(m_0) \right)$, где

$$C_j(m_0) = \{ n \mid n = 6kj - (k-j) \le m_0, j \le k, k \in N \},\ j \in H_2(r_0),$$

$$D_i(m_0) = \{ n \mid n = 6ki + (k-i) \le m_0, i \le k, k \in N \}, \quad i \in H_2(r_0), \quad r_0 = \left[\sqrt{\frac{m_0}{6}} \right].$$

Множества $C_j = C_j(m_0)$ и $D_i = D_i(m_0)$ называются подклассами $M_2(m_0)$ с коэффициентами $6j-1$ и $6i+1$, соответственно.

Обозначим через $Q_{1,0}(m_0; j; 0)$ и $Q_{0,1}(m_0; 0; i)$ соответственно количество элементов подклассов C_j и D_i, $j, i \in H_2(r_0)$. Нетрудно установить, что

$$Q_{1,0}(m_0; j; 0) = \left[\frac{m_0 - j}{6j-1} \right] \quad \text{и} \quad Q_{0,1}(m_0; 0; i) = \left[\frac{m_0 + i}{6i+1} \right].$$

Пусть $j_1, j_2, \ldots, j_l \in H_2(r_0)$ некоторые числовые индексы такие что, $j_k \ne j_m$ при $k \ne m$, а также $i_1, i_2, \ldots, i_r \in H_2(r_0)$ некоторые числовые индексы такие что, $i_k \ne i_m$ при $k \ne m$. Обозначим через $Q_{l,r}(m_0; j_1, j_2, \ldots, j_l; i_1, i_2, \ldots, i_r)$ количество общих элементов подклассов C_j, D_i, $j = j_1, j_2, \ldots, j_l$, $i = i_1, i_2, \ldots, i_r$. $i = i_1, i_2, \ldots, i_r$. Обозначим через r_1 элемент множества $H_2(r_0)$, для которого $6r_1 - 1$ наибольшее простое число, через s_1 элемент множества $H_2(r_0)$, для которого $6s_1 + 1$ наибольшее простое число и $n_2 \equiv r_1 + s_1$. Пусть снова

$$\aleph_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)} = (6j_1-1)(6j_2-1)\cdots(6j_l-1)(6i_1+1)(6i_2+1)\cdots(6i_r+1).$$

Обозначим

$$\beta_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)} == \begin{cases} \dfrac{5\cdot \aleph_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}-1}{6}, & \text{если } l \text{ нечетное число,} \\ \dfrac{\aleph_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}-1}{6}, & \text{если } l \text{ четное число.} \end{cases}$$

В силу леммы 9 работы [2],

$$Q_{l,r}(m_0; j_1, j_2, \ldots, j_l; i_1, i_2, \ldots, i_r) = \left[\frac{m_0 + \beta_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}}{\aleph_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}} \right], \quad l + r \ge 2.$$

Для заданного $k \in N(n_2)$ обозначим сумму $\sum_{l+r=k} Q_{l,r}(m_0; j_1, j_2,..., j_l; i_1, i_2,..., i_r)$ через $Q_k(m_0)$. Заметим, что количество слагаемых $Q_{l,r}(m_0; j_1, j_2,..., j_l; i_1, i_2,..., i_r)$ в сумме $Q_k(m_0)$, есть $C_{n_2}^k$. Для наглядности приведем явный вид функций $Q_k(m_0)$, $k = 1,2,..., n_2$:

$$Q_1(m_0) = \left[\frac{m_0 - 1}{5}\right] + \left[\frac{m_0 - 2}{11}\right] + ... + \left[\frac{m_0 - r_1}{6r_1 - 1}\right] + \left[\frac{m_0 + 1}{7}\right] + \left[\frac{m_0 + 2}{13}\right] + ... + \left[\frac{m_0 + s_1}{6s_1 + 1}\right]$$

,

$$Q_2(m_0) = \left[\frac{m_0 + 29}{5 \cdot 7}\right] + \left[\frac{m_0 + 9}{5 \cdot 11}\right] + ... + \left[\frac{m_0 + 5 \cdot (6r_1 s_1 - r_1 + s_1 - 1)}{(6r_1 - 1)(6s_1 + 1)}\right],$$

$$Q_3(m_0) = \left[\frac{m_0 + 64}{5 \cdot 7 \cdot 11}\right] + \left[\frac{m_0 + 379}{5 \cdot 7 \cdot 13}\right] + ... + \left[\frac{m_0 + \beta_{(r_1; s_1 - 1, s_1)}}{(6r_1 - 1)(6(s_1 - 1) + 1)(6s_1 + 1)}\right] +$$

$$+ \left[\frac{m_0 + \beta_{(r_1 - 1; r_1, s_1)}}{(6(r_1 - 1) - 1)(6r_1 - 1)(6s_1 + 1)}\right],$$

...,

$$Q_{n_2}(m_0) = \left[\frac{m_0 + \beta_{(1,2,...,r_1; 1,2,...,s_1)}}{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (6r_1 - 1) \cdot (6s_1 + 1)}\right].$$

Так же, как это было сделано в предыдущем пункте, учитывая утверждение леммы 1, переформулируем формулу определения количества элементов множества $M_2(m_0)$ в виде

$$mes\left(\bigcup_{j \in H_2(r_0)} C_j(m_0)\right) \bigcup \left(\bigcup_{i \in H_2(r_0)} D_i(m_0)\right) =$$

$$= \sum_{l+r=1}^{n_2} (-1)^{l+r-1} \sum_{(j_1 < j_2 < ... < j_l)} \sum_{(i_1 < i_2 < ... < i_r)} mes\left(\left(\bigcap_{j_s \in H_2(r_0)} C_{j_s}(m_0)\right) \cap \left(\bigcap_{i_s \in H_2(r_0)} D_{i_s}(m_0)\right)\right),$$

и принимая во внимание принятые выше обозначения, получим

$$Q(m_0) = Q_1(m_0) - Q_2(m_0) + Q_3(m_0) + ... + (-1)^{n_2 - 1} Q_{n_2}(m_0).$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Для заданного* $m_0 \in N$ *количество элементов множества* $M_2(m_0)$ *определяется по формуле*

$$Q(m_0) = \sum_{k=1}^{n_2} (-1)^{k-1} Q_k(m_0) =$$

$$= \sum_{l+r=1}^{n_2} (-1)^{l+r-1} \sum_{\substack{(j_1 < j_2 < ... < j_l), \\ j_1, j_2, ..., j_l \in H_2(r_0)}} \sum_{\substack{(i_1 < i_2 < ... < i_r), \\ i_1, i_2, ..., i_r \in H_2(r_0)}} \left[\frac{m_0 + \beta_{(j_1, j_2, ..., j_l; i_1, i_2, ..., i_r)}}{(6j_1 - 1)(6j_2 - 1) \cdots (6j_l - 1)(6i_1 + 1)(6i_2 + 1) \cdots (6i_r + 1)}\right]$$

,

где $r_0 = \left[\sqrt{\frac{m_0}{6}}\right]$,

$$\beta_{(j_1, j_2, ..., j_l; i_1, i_2, ..., i_r)} == \begin{cases} \dfrac{5 \cdot \aleph_{(j_1, j_2, ..., j_l; i_1, i_2, ..., i_r)} - 1}{6}, & \text{если } l \text{ нечетное число,} \\ \dfrac{\aleph_{(j_1, j_2, ..., j_l; i_1, i_2, ..., i_r)} - 1}{6}, & \text{если } l \text{ четное число.} \end{cases}$$

Теперь учитывая, что $H_2(m_0) = N(m_0) \setminus M_2(m_0)$, для определения количества простых чисел вида $6m-1$ можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 4. *Для заданного* $m_0 \in N$ *количество элементов множества* $H_2(m_0)$ *определяется по формуле*

$$\pi^{(-)}(6m_0+1) = m_0 - Q(m_0) = \tag{3}$$

$$= m_0 - \sum_{l+r=1}^{n_2} (-1)^{l+r-1} \sum_{\substack{(j_1<j_2<\ldots<j_l),\\ j_1,j_2,\ldots,j_l \in H_2(r_0)}} \sum_{\substack{(i_1<i_2<\ldots<i_r),\\ i_1,i_2,\ldots,i_r \in H_2(r_0)}} \left[\frac{m_0 + \beta_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}}{(6j_1-1)(6j_2-1)\cdots(6j_l-1)(6i_1+1)(6i_2+1)\cdots(6i_r+1)}\right],$$

где $r_0 = \left[\sqrt{\frac{m_0}{6}}\right]$,

$$\beta_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)} == \begin{cases} \dfrac{5\cdot\aleph_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}-1}{6}, & \text{если } l \text{ нечетное число,} \\ \dfrac{\aleph_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}-1}{6}, & \text{если } l \text{ четное число.} \end{cases}$$

Вычисление количества простых чисел не превосходящих $6m_0+1$. Итак, количество простых чисел, не превосходящих $x = 6m_0+1$ обозначим, как обычно [1], через $\pi(6m_0+1)$. Выше было показано, что количество простых чисел вида $6m+1$, не превосходящих $x = 6m_0+1$, т.е. числа $7, 13, 19, 31, \ldots$ определяются по формуле (2). С другой стороны, количество простых чисел вида $6m-1$, также не превосходящих $x = 6m_0+1$, т.е. числа $5, 11, 17, 23, \ldots$ определяются по формуле (3). Легко заметить, что в приведенных последовательностях отсутствуют еще два простых числа: 2 и 3. Поэтому, имеем

$$\pi(6m_0+1) = \pi^{(+)}(6m_0+1) + \pi^{(-)}(6m_0+1) + 2,$$

или

$$\pi(6m_0+1) = 2(m_0+1) - \left(P(m_0) + Q(m_0)\right).$$

Учитывая явный вид функций $P(m_0)$ и $Q(m_0)$, получим справедливость следующего утверждения.

Теорема 5. *Количество простых чисел, не превосходящих* $6m_0+1$, $m_0 \in N$ *определяется по формуле*

$$\pi(6m_0+1) = 2(m_0+1) -$$

$$- \sum_{l+r=1}^{n_1} (-1)^{l+r-1} \sum_{\substack{(j_1<j_2<\ldots<j_l),\\ j_1,j_2,\ldots,j_l \in H_1(v_0)}} \sum_{\substack{(i_1<i_2<\ldots<i_r),\\ i_1,i_2,\ldots,i_r \in H_1(k_0)}} \left[\frac{m_0 + \alpha_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}}{(6j_1-1)(6j_2-1)\cdots(6j_l-1)(6i_1+1)(6i_2+1)\cdots(6i_r+1)}\right] -$$

$$- \sum_{l+r=1}^{n_2} (-1)^{l+r-1} \sum_{\substack{(j_1<j_2<\ldots<j_l),\\ j_1,j_2,\ldots,j_l \in H_2(r_0)}} \sum_{\substack{(i_1<i_2<\ldots<i_r),\\ i_1,i_2,\ldots,i_r \in H_2(r_0)}} \left[\frac{m_0 + \beta_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}}{(6j_1-1)(6j_2-1)\cdots(6j_l-1)(6i_1+1)(6i_2+1)\cdots(6i_r+1)}\right],$$

где $v_0 = \left[\frac{1+\sqrt{6m_0+1}}{6}\right]$, $k_0 = \left[\frac{-1+\sqrt{6m_0+1}}{6}\right]$, $r_0 = \left[\sqrt{\frac{m_0}{6}}\right]$,

$$
\alpha_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}=\begin{cases}\dfrac{5\cdot\aleph_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}+1}{6}, & \text{если } l \text{ четное число,}\\[2ex] \dfrac{\aleph_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}+1}{6}, & \text{если } l \text{ нечетное число}\end{cases}
$$

$$
\beta_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}==\begin{cases}\dfrac{5\cdot\aleph_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}-1}{6}, & \text{если } l \text{ нечетное число,}\\[2ex] \dfrac{\aleph_{(j_1,j_2,\ldots,j_l;i_1,i_2,\ldots,i_r)}-1}{6}, & \text{если } l \text{ четное число.}\end{cases}
$$

В заключении отметим, что на основании этой теоремы может быть разработан алгоритм генерации достаточно больших простых чисел в любом заранее заданном интервале натурального числового ряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Бухштаб. Теория Чисел. М., Просвещение, 1966.
2. Н.М. Сабзиев. Свойство множеств порождающие составные числа вида $6m \pm 1$. Известия НАЦ Азербайджана. Сер.физ.-тех. и матем.наук, 2003, том XXIII, №3.
3. Н.М. Сабзиев. Распределение простых чисел в натуральном ряду. ВИНИТИ, Деп. № 9, 1980.
4. Н.М. Сабзиев. О росте функции $\pi(x)$. АзНИИНТИ, Деп.№1280-Аз., 1985.

Компания Kiber Ltd — Представлено 250603